数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 165-167

モジュラー曲線の積の上のゼロサイクルについて

筑波大学数学系　木村健一郎 (KENICHIRO KIMURA)

Institute of mathematics, University of Tsukuba

この原稿は論文[Ki] の要約である。X を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の非特異射影的代数多様体とする。整数 $r \geq 0$ に対し、Chow 群 $CH^r(X)$ は X の余次元 r の代数的サイクルの群を有理同値という同値関係で割った群である。正確な定義は[Fu] を参照されたい。この場合 $CH^r(X)$ は有限生成アーベル群であることが予想されている (Bass conjecture)。r が 0 または 1 の時はこれは正しい。ここでは $r=2$ の場合にこれを示すという問題を考える。non-torsion の部分についてはいいアイデアが無いので、torsion part の有限性を示す事を考える。これについて知られている方法および結果を述べる。S を素数の有限集合で、X が $U := \mathrm{spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$ 上射影的で滑らかなモデル $\mathcal{X}$ を持つようなものとする。この時 Bloch ([Bl1],[Bl2]) と Sherman の結果により、次の完全系列が存在する。

$$H^1(\mathcal{X}, \mathcal{K}_2) \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p \in U} Pic(X_p) \to CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X) \to 0.$$

ここで $\mathcal{K}_2$ は、ザリスキ presheaf $U \mapsto K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ に付随する層である。代数的 K 群については[Qu] を参照。また素数 p に対し、$X_p = \mathcal{X} \bmod p$ である。ここに現れる写像のうち、∂ 以外は自然な包含写像または引き戻しである。$H^1(X, \mathcal{K}_2)$ は次の複体の cohomology として記述される。

$$K_2(\mathbb{Q}(X)) \to \bigoplus_{x \in X^1} \kappa(x)^* \to \bigoplus_{y \in X^2} \mathbb{Z}.$$

ここで最初の写像は tame symbol と呼ばれる物で、2番目の写像は有理関数の因子をとる写像である。また X^m は X の余次元 m の点全体の集合である。$\mathbb{Q}(X)$ は X の関数体である。この記述により、$H^1(X, \mathcal{K}_2)$ の元は X の prime divisor D_i とその上の有理関数 f_i の組の有限和 $\sum_i (D_i, f_i)$ と表される。この時写像 ∂ は $\partial(\sum_i (D_i, f_i)) = \sum_i \mathrm{div} f_i$ と表される。ここで $\mathrm{div} f_i$ は D_i の $\mathcal{X}$ での閉包上での f_i の因子である。L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想と、代数的サイクルに関する Tate 予想を仮定すると、写像 ∂ の余核は torsion であることが導かれる ([Lang] の定理 2.5 の後の注意を参照)。$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ の時はこれは正しい。Bloch-Merkurjev-Suslin によるある結果により、S に入らない素数 p に対しては $CH^2(\mathcal{X})$ の p 冪 torsion 部分は $H^3_{et}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ の部分商であり、従って co finitely generated であることがわかる。よって Coker(∂) が torsion ならば $CH^2(X)$ の p 冪 torsion 部分も co finitely generated であることがわかる。Chow 群の有限性について、1994 年までの主な結果は

Colliot-Thélène-Raskind([CTR]) と Salberger([Sa]) によるもので、$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ の時に代数体 k 上の非特異射影的代数多様体 X の $CH^2(X)$ の torsion 部分は有限であるというものである。

$H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ の時はまず Coker(∂) が torsion である事を示すのが難しくなる。例えば、X が $\mathbb{Q}$ 上の非特異代数曲線 C の積 $C \times C$ である時、$Pic(X_p)$ には Frobenius のグラフ Fr_p がある。一般に Fr_p は $Pic(X)$ への持ちあげを持たないので、Fr_p が写像 ∂ の像に入っている事を示すのは自明でない。しかし C が modular 曲線 $X_0(N)$ の時、Mildenhall([Mi]) により任意の素数 $p \nmid N$ に対し、$\partial(\alpha_p) = Fr_p$ となる $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ の元 α_p が構成された。これを使って Langer-Saito([LS]) は、X が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の積 $E \times E$ である時、任意の素数 $p \nmid 6N_E$ に対し $CH^2(X)$ の p 冪 torsion 部分が有限であることを示した。ただし N_E は E の conductor である。

次に C がより種数の高いモジュラー曲線の場合を考える。整数 $N > 0$ に対し、$S_2(\Gamma_0(N))$ の元 f で、全ての Hecke 作用素 $T_n(n > 0)$ の固有関数になっている物を考える。このとき、$X_0(N)$ の Jacobian $Jac(X_0(N))$ の部分アーベル多様体 A_f で、次の性質を持つ物がある ([Sh], Theorem7.14)。

(1)$K = \mathbb{Q}(a_n)_{n>0}$ を、f への T_n の作用の固有値全てで生成される体とすると、$\dim A_f = [K : \mathbb{Q}]$.

(2) 準同型 $\theta : K \to End_{\mathbb{Q}}(A_f) \otimes \mathbb{Q}$ があり、任意の $n > 0$ に対し、$T_n|_{A_f} = \theta(a_n)$ が成り立つ。

定義. C を $\mathbb{Q}$ 上の非特異射影的代数曲線とする。ある $N > 0$ に対し有限な全射 $h : X_0(N) \to C$ があって、それにより誘導される写像 $h_* : Jac(X_0(N)) \to Jac(C)$ によりある *Hecke eigenform* f に付随する A_f と $Jac(C)$ の *isogeny* が与えられる時、C はモジュラーであるという。

例えば $X_0(23)$ や $X_0(41)$ はこの意味でモジュラーである。以下曲線 C は上の意味でモジュラーであるとし、$X = C \times C$ とする。素数 $p \nmid N$ に対し、C は p で good reduction を持つ。$Fr_p \in End_{\mathbb{F}_p}(Jac(C_p))$ を Frobenius 準同型とする。

命題 ([Ki]). $\mathcal{S}$ を 次の条件を満たす素数 p 全体の集合とする。*(1)* $p \nmid N$. *(2)* $Fr_p \notin \theta(K)$. *(3)* $K = \mathbb{Q}(a_p)$. この時写像

$$\partial : H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} Pic(X_p)$$

の余核は *torsion* である。

定理 ([Ki]). $End(Jac(C) \otimes \bar{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q} = K$ であるとする。この時、正の定数 c, δ が存在して次が成り立つ：

$$\#\{p \leqq x | a_p \text{ is in a proper subfield of } K\} \leqq c \frac{x}{(\log x)^{1+\delta}}.$$

定理の証明には Baba-Murty([BaMu]) のアイデアを使う。

系 ([Ki]). 定理の条件の下で $\mathcal{S}$ の密度は *1* である。

References

[BaMu] Baba, S., Murty, R., *Irreducibility of Hecke polynomials*, Math.Res.Letters **10** (2003), 709-715.

[Bl1] Bloch, S., *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University Press, 1980.

[Bl2] Bloch, S., *"A note on Gersten's conjecture in the mixed characteristic case" in Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part I, II*, Contemp. Math. **55** (1986), Amer. Math. Soc. Providence.

[CTSS] Colliot-Thélène, J., Sansuc, J., Soulé, C., *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763-801.

[Fl] Flach, M., *A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve*, Invent. Math **109** (1992), 307-327.

[Fu] Fulton, W., *Intersection Theory*, Springer, 1984.

[HiMa] Hida, H., Maeda, Y., *Non-abelian base change for totally real fields*, Pacific J. Math. **Special issue** (1997), 189-217.

[Ki] Kimura, K., *Zero-cycles on self-product of modular curves*, preprint, math.AG/0402006 (2004).

[Land] Landsburg, S. E., *Relative Chow groups*, Illinois J. Math. **35** (1991), 618-641.

[Lang] Langer, A., *Zero cycles on Hibert-Blumenthal surfaces*, Duke Math. J **103** (2000), 131-163.

[La2] Langer, A., *Finiteness of torsion in the codimension-two Chow group: an axiomatic approach.*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. **548** (2000), 277-284.

[LR] Langer, A., Raskind, W., 0*-cycles on the self-product of a CM elliptic curve over* $\mathbb{Q}$, J. Reine Angew. Math. **516** (1999), 1-26.

[LS] Langer, A., Saito, S., *Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve*, Duke Math. J **85** (1996), 315-357.

[Mi] Mildenhall, S., *Cycles in a product of elliptic curves, and a group analogous to the class group*, Duke Math. J **67** (1992), 387-406.

[Mil] Milne, J. S., *Abelian varieties*, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), Springer, 1986, pp. 103-150.

[Mü] Müller-Stach, S., *Constructing indecomposable motivic cohomology classes on algebraic surfaces*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 513-543.

[Qu] Quillen, D., *"Higher algebraic K-theory. I."in Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972*, Lecture Notes in Math. **341** (1973), 85-147.

[Ra] Raskind, W., *"Torsion algebraic cycles on varieties over local fields" in Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **279** (1989), 343-388.

[Ri] Ribet, K.A., *Galois representations attached to eigenforms with nebentypes*, SLN **601** (1976), 17-52.

[Sh] Shimura, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kano Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11.*, Iwanami Shoten, 1971.

[Sri] Srinivas, V., *Algebraic K-theory, Progress in Math.*, vol. 90, Birkhäuser, 1991.

[St] Wetherell, J.L., Stein, W., Bernardi, D., Perrin-Riou, B., , http://modular.fas.harvard.edu/Tables/heckegp.html.

[We] Weston,T., *Algebraic cycles, modular forms and Euler systems*, J. Reine Angew. Math. **543** (2002), 103–145.